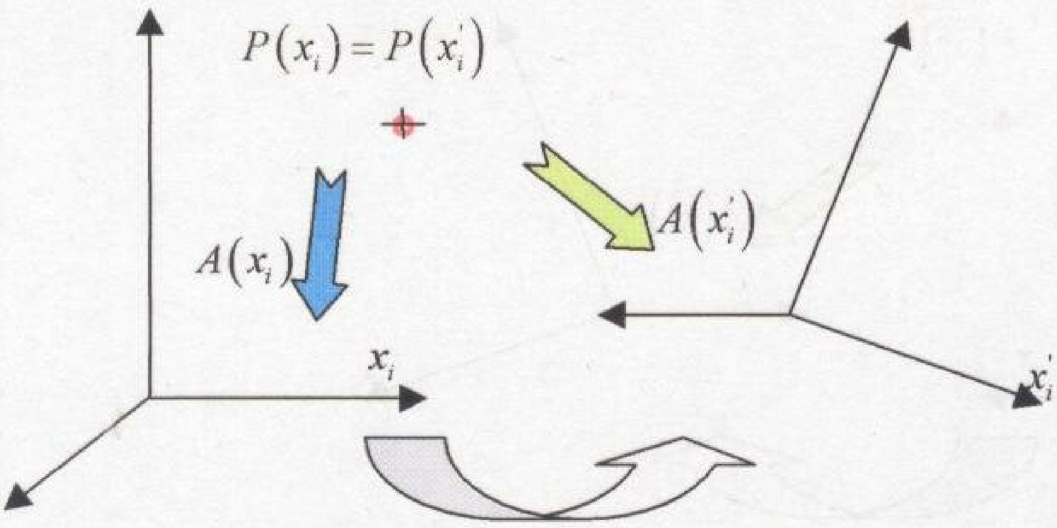
PREDNÁŠKA Č. 1: Základy tenzorového počtu

Obsah:
- definícia tenzorov
- rozdelenie tenzorov
- stupeň tenzora
- označovanie tenzorov
- indexy a indexovaný zápis
- sumačné pravidlo (príklady)
- Kroneckerová delta a permutačný (Levi-Cita) symbol
- Transformácia súradníc
- Transformačné pravidlo pre skaláre, vektory, dyády a polyády
- Základné operácie s tenzormi

Definícia tenzorov

Tenzory sú fyzikálne veličiny $A(x_i)$ definované v hmotnom bode telesa $P(x_i)$, obsahujúce určitý počet zložiek vzťahovaných na vzťažný súradnicový systém $x_i = (x_1, x_2, x_3)$. Vzhľadom na iný, transformovaný súradnicový systém $x_i^{'} = (x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'})$ sa zložky tejto fyzikálnej veličiny zmenia na $A(x_i^{'})$. Ak medzi pôvodnými a transformovanými zložkami platí určitá závislosť (transformačný vzťah), potom táto fyzikálna veličina je tenzorom stupňa n, a možno s ňou operovať v zmysle tenzorového počtu.



Transformácia súradníc

Transformačný vzťah: $A(x_i) = f\left(A(x_i^{'})\right) \quad A(x_i^{'}) = g\left(A(x_i)\right)$

Rozdelenie tenzorov a ich stupeň:

Podľa vzťažného súradnicového systému: - kartézske (3D pravouhlý)
- všeobecné (so všeobecnou bázou)

Kartézske tenzory majú v bode telesa 3^n zložiek a delia sa podľa stupňa (rádu) n na:

- skaláre	$n = 0$	tenzory nultého stupňa – majú v bode len jednu zložku
- vektory	$n = 1$	tenzory prvého stupňa – majú v bode 3 zložky
- dyády	$n = 2$	tenzory druhého stupňa – majú v bode 9 zložiek
- triády	$n = 3$	tenzory stupňa tretieho – majú v bode 27 zložiek
- polyády	n	tenzory n – tého stupňa – majú v bode 3^n zložiek

V rámci týchto prednášok sa budeme zaoberať len kartézskými tenzormi

Označovanie tenzorov, indexy a indexovaný zápis

Tenzory sa označujú veľkými alebo malými písmenami našej alebo gréckej abecedy s indexami.
Príklad:

$$A_{ij}, a_i, {}_l A^k_{ijj}, C_{ijkl}, \sigma_{ik} u_{i,j}, \tau_{ij}, u_i, {}^{k}_{il}B_{ii}$$

Indexy nadobúdajú určitú veľkosť danú celým (integer) číslom, napr.: $i = 1, 2, \ldots n$
Pre kartézske tenzory je veľkosť indexu n rovná maximálne číslu 3.

Indexy sa delia na: - voľné - vo výraze sa vyskytujú iba raz - A_{ik}
- sumačné - vo výraze sa opakujú (maximálne 2x) - A_{iikl}

Príklad indexovaného zápisu:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$\int_V \tau_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV = \int_A F_i \delta u_i dA$$

$$E_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}$$

$$i, j, k = 1, 2, 3$$

Sumačné pravidlo

Je to forma zjednodušeného zápisu, ktorý zaviedol Albert Einstein – einsteinovská sumácia:

**Opakovanie sa indexu vo výraze znamená sčítanie (sumáciu) cez veľkosť indexu.
Sumačné indexy možno počas matematických úprav voľne premenovávať.**

Príklad 1: Zápis rovnice roviny

Klasická rovnica roviny: $ax + by + cz = p$

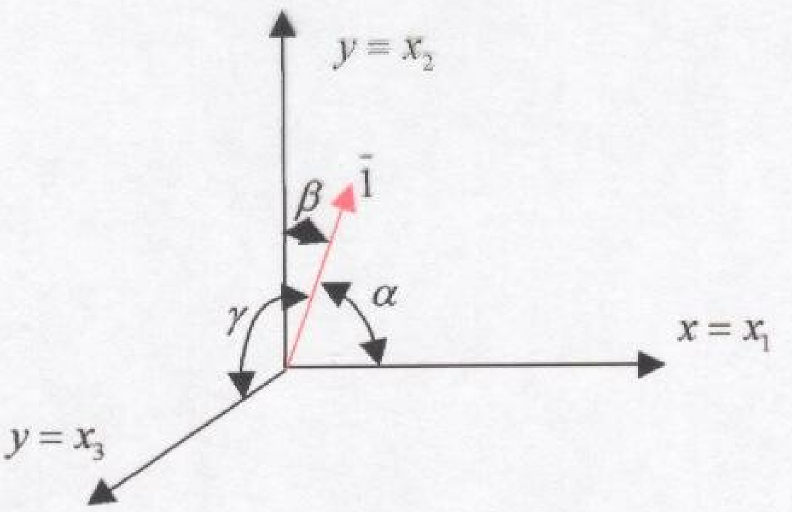
Premenujme: $\begin{matrix} x \to x_1 & y \to x_2 & z \to x_3 \\ a \to a_1 & b \to a_2 & c \to a_3 \end{matrix}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = p$$

Potom: $\sum_{i=1}^{3} a_i x_i = p$

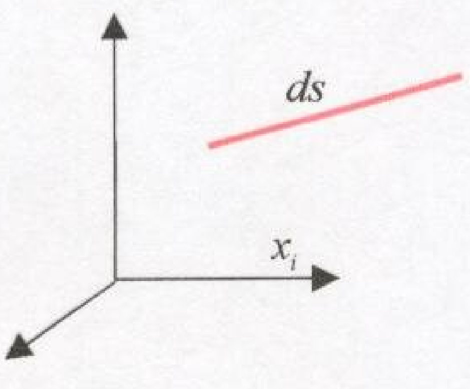
$$a_i x_i = p, \quad i = 1,3$$

Príklad 2: Vzťah medzi smerovými uhlami jednotkového vektora



$$\cos\alpha = \nu_1 \quad \cos\beta = \nu_2 \quad \cos\gamma = \nu_3$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$
$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$$
$$\nu_1\nu_1 + \nu_2\nu_2 + \nu_3\nu_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_i\nu_i = 1, \quad i = 1,3$$

Príklad 3: Štvorec elementárnej dĺžky



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \Rightarrow \quad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad \Rightarrow \quad ds^2 = dx_1dx_1 + dx_2dx_2 + dx_3dx_3$$

$$ds^2 = dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j \quad i, j = 1,3$$

$\delta_{ij} \to$ Kroneckerova delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ pre } i = j & \Rightarrow \quad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \\ 0 \text{ pre } i \neq j & \Rightarrow \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = ...\delta_{31} = 0 \end{cases}$$

V maticovom tvare:

$$\left(\delta_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$dx_i \overset{d}{x}_i = dx_j dx_j = \delta_{ij} dx_i dx_j \qquad \delta_{ij} dx_i = \delta_{1j} dx_1 + \delta_{2j} dx_2 + \delta_{3j} dx_3 = dx_j$$

Platí: pre $j = 1$: $\quad \delta_{i1} dx_i = \delta_{11} dx_1 + \delta_{12} dx_2 + \delta_{13} dx_3 = dx_1$

pre $j = 2$: $\quad \delta_{i2} dx_i = dx_2$

pre $j = 3$: $\quad \delta_{i3} dx_i = dx_3$

Teda: $dx_i = \delta_{ij} dx_j = \delta_{ik} x_k$

Kroneckerova delta je forma jednotky v tenzorovom počte, tiež sa nazýva tenzor identity. Výsledkom jeho aplikácie na tenzor A je ten istý tenzor: $\delta A = A$, resp. $A = A$

Príklad 3: Determinant štvorcovej matice

$$\det\left(a_{ij}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + ...$$

Alebo

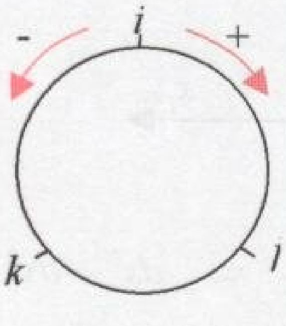
$$\left|\left(a_{ij}\right)\right| = e_{rst} a_{r1} a_{s2} a_{t3} \qquad e_{ijk} \quad \rightarrow \quad \text{permutačný symbol}$$

Jeho vlastnosti : tenzor 3. stupňa

$e_{111} = e_{222} = e_{333} = e_{112} = e_{113} = e_{331} = ... = 0$

$e_{123} = e_{231} = e_{312} = +1$

$e_{132} = e_{213} = e_{321} = -1$



$\Rightarrow \quad e_{ijk} = e_{jki} = e_{kij} = +1 \quad e_{jik} = -e_{ijk} = -1$

$\Rightarrow \quad e_{ikj} = e_{kji} = e_{jik} = -1$

Príklad: Indexovaný zápis v deriváciách

Majme vektory: $\bar{u} = (u, v, w)$ - vektorové pole posunutia bodov
$\bar{x} = (x, z, y)$ - pole polohových vektorov bodov

Ako vyjadríme gradient ~~poľa~~ vektorového poľa posunutia?

$$grad\bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Označme: $u \to u_1 \quad v \to u_2 \quad w \to u_3$
$x \to x_1 \quad y \to x_2 \quad z \to x_3$

$$grad\bar{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j} \qquad i, j = 1,3$$

Potom:

$$\left(u_{i,j}\right) = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix}$$

Ako vyjadríme divergenciu vektorového poľa?

$$div\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = u_{i,i}$$

Príklad: Vyjadrenie diferenciálnych statických podmienok rovnováhy v indexovanom tvare

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + K_x = 0 \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + K_y = 0 \qquad \tau_{zy} = \tau_{yz}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + K_z = 0 \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Urobme zámenu: $\tau_{11} = \sigma_x \quad \tau_{22} = \sigma_y \quad \tau_{33} = \sigma_z \quad \tau_{12} = \tau_{xy} \quad \tau_{23} = \tau_{yz} \quad \tau_{31} = \tau_{yx}$

$K_x = K_1 \quad K_y = K_2 \quad K_z = K_3$

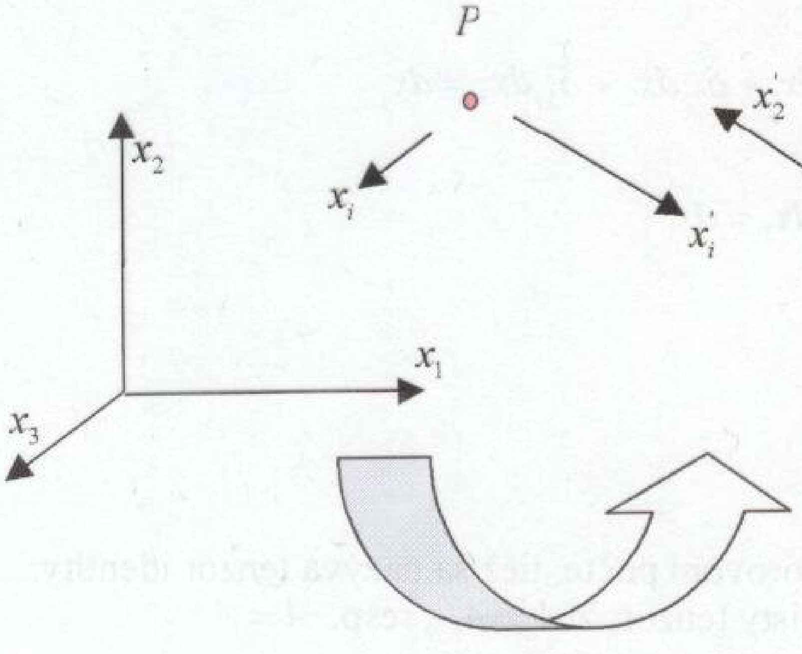
Potom rovnice rovnováhy sú:

$$\tau_{ij,j} + K_i = 0$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

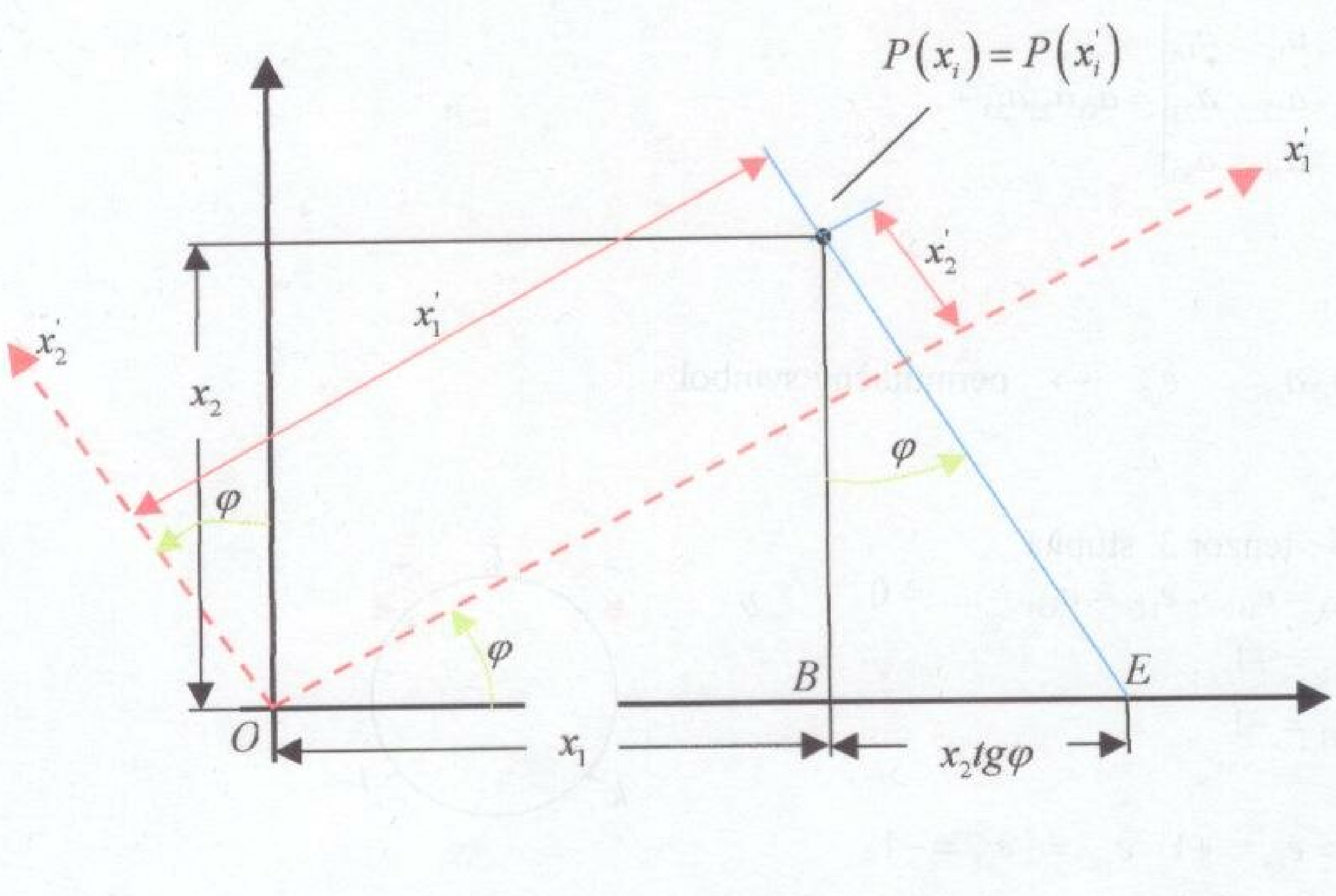
$$i, j = 1,3$$

Transformácia kartézskych súradníc



Transformácia = translácia + rotácia

Uvažujme len rotáciu (natočenie súradníc) v rovine x_1, x_2:



$$x_1' = \overline{OE}\cos\varphi = \left(x_1 + \overline{BE}\right)\cos\varphi = \left(x_1 + x_2 tg\varphi\right)\cos\varphi$$

$$x_i' = f\left(x_i\right) \quad x_i = g\left(x_i'\right) \qquad x_1' = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi \qquad x_2' = -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$x_3' \quad 0 \quad 0 \quad 1$

Označíme

$x_3' = x_3$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & +\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \left(a_{ij}\right)$$

Potom

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \qquad x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

$$\Rightarrow \quad x_i' = a_{ij}x_j \quad i, j = 1, 2$$

$\left(a_{ij}\right) \rightarrow$ transformačná matica natočenia SS okolo osi $z \equiv x_3 \equiv x_3'$

Transponujme maticu $\left(a_{ij}\right)$ na $\left(a_{ij}\right)^T$:

zlá strana, vymeniť ✓

$$\left(a_{ij}\right)^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ +\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \left(a_{ji}\right)$$

Ak by sme z geometrických závislosti transformácie súradníc vyjadrili vzťah medzi pôvodnými a natočenými súradnicami, dostaneme:

$x_i = a_{ji}x_j'$, kde a_{ji} sú členy transponovanej matice $\left(a_{ji}\right)$. Z porovnania vzťahov $x_i' = a_{ij}x_j$ a $x_i = a_{ji}x_j'$ vyplýva, že $\left(a_{ji}\right) = \left(a_{ij}\right)^T = \left(a_{ij}\right)^{-1}$, t.j., že inverzia matice $\left(a_{ij}\right)$ je rovná jej transponovanému tvaru : $\left(a_{ji}\right) = \left(a_{ij}\right)^T = \left(a_{ij}\right)^{-1}$. Matica pre ktorú platí tento vzťah sa nazýva ortogonálna matica, a príslušná transformácia sa nazýva ortogonálna transformácia.

Urobme súčin:

$$\left(a_{ij}\right)\left(a_{ij}\right)^T = \left(a_{ij}\right)\left(a_{ij}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(\delta_{ij}\right)$$

Teda, zložky Kroneckerovej delty sú: $\delta_{ij} = a_{ik}a_{jk} = a_{ki}a_{kj}$

Resp.:

$$\left(\delta_{ij}\right) = \left(a_{ik}\right)\left(a_{jk}\right) = \left(a_{ik}\right)\left(a_{ik}\right)^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Napr.: $$\begin{aligned} &\delta_{12} = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = \cos\varphi \sin\varphi - \sin\varphi \cos\varphi = 0 \\ &\Rightarrow \quad \delta_{ij} = a_{ik}a_{jk} \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2 \qquad k = 1,2 \end{aligned}$$

i a j sú voľné indexy a k je indexom sumačným.
Kroneckerová delta je tenzorom druhého stupňa.

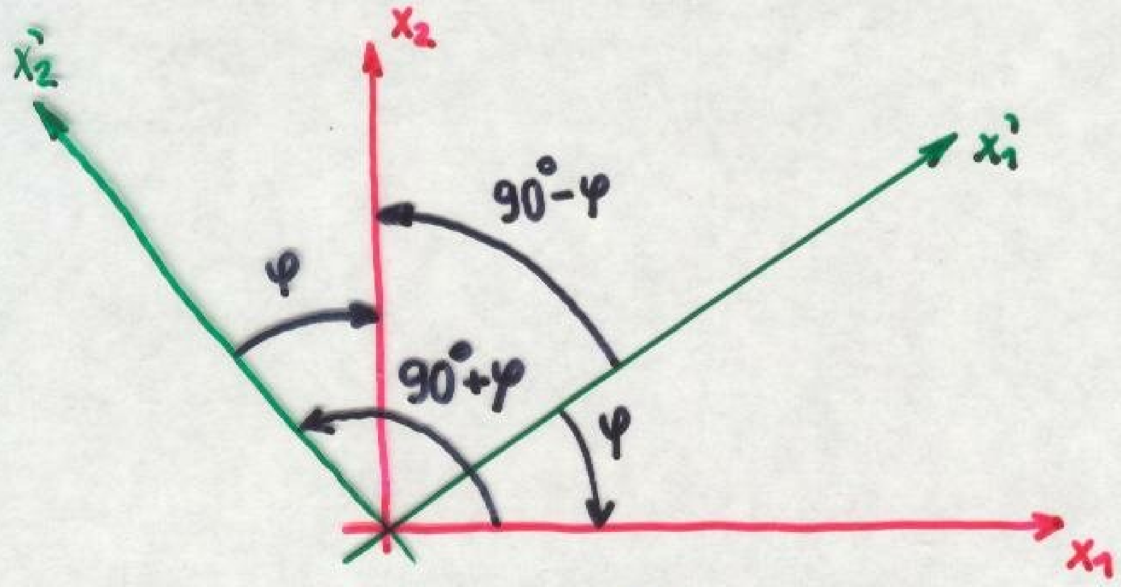
Napr.: $\delta_{12} = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = \cos\varphi \sin\varphi - \sin\varphi \cos\varphi = 0$

$\Rightarrow \quad \delta_{ij} = a_{ik}a_{jk} \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2 \qquad k = 1,2$

i a j sú voľné indexy a k je indexom sumačným.
Kroneckerová delta je tenzorom druhého stupňa.

Geometrický význam (a_{ij})

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x'_i = a_{ij}\, x_j \\ x_i = a_{ji}\, x'_j \end{matrix}$$



$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \cos\varphi = \cos(\widehat{x'_1, x_1}) \\ a_{22} &= \cos\varphi = \cos(\widehat{x'_2, x_2}) \\ a_{12} &= \sin\varphi = \cos(90° - \varphi) = \cos(\widehat{x'_1, x_2}) \\ a_{21} &= -\sin\varphi = \cos(90° + \varphi) = \cos(\widehat{x'_2, x_1}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{ij} = \cos(\widehat{x'_i, x_j})$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \cos(90° - \varphi) & \phi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & \phi \\ \phi & \phi & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & +\sin\varphi & \phi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & \phi \\ \phi & \phi & 1 \end{pmatrix}$$

$(a_{ij}) = (a_{ij})^{x_1} \cdot (a_{ij})^{x_2} \cdot (a_{ij})^{x_3} \Rightarrow$ matica natočenia okolo troch osí

Transformácia súradníc:

sumačný ind.

$$x_i' = a_{ij}\, x_j \qquad\qquad i,j = 1,3 \qquad\qquad x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$x_i = a_{ji}\, x_j' \qquad\qquad x_i' = f(x_1, x_2, x_3)$$

Pre <u>prípustnú</u> transformáciu musí platiť:

$$J = \left| \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} \right| \neq 0$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_3} \\ x_{2,1}' & x_{2,2}' & x_{2,3}' \\ x_{3,1}' & x_{3,2}' & x_{3,3}' \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Jacobián}$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}x_j) = a_{ij} \Rightarrow J = |a_{ij}|$$

$$J = \begin{cases} > \emptyset & \text{- vlastná tr.} \\ < \emptyset & \text{- nevlastná} \end{cases}$$

$$|a_{ij}| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{- natočenie súradníc okolo z}$$

$\cancel{(A_{ij}) = (a_{ij})(b_{kl})(c_{mn})}$

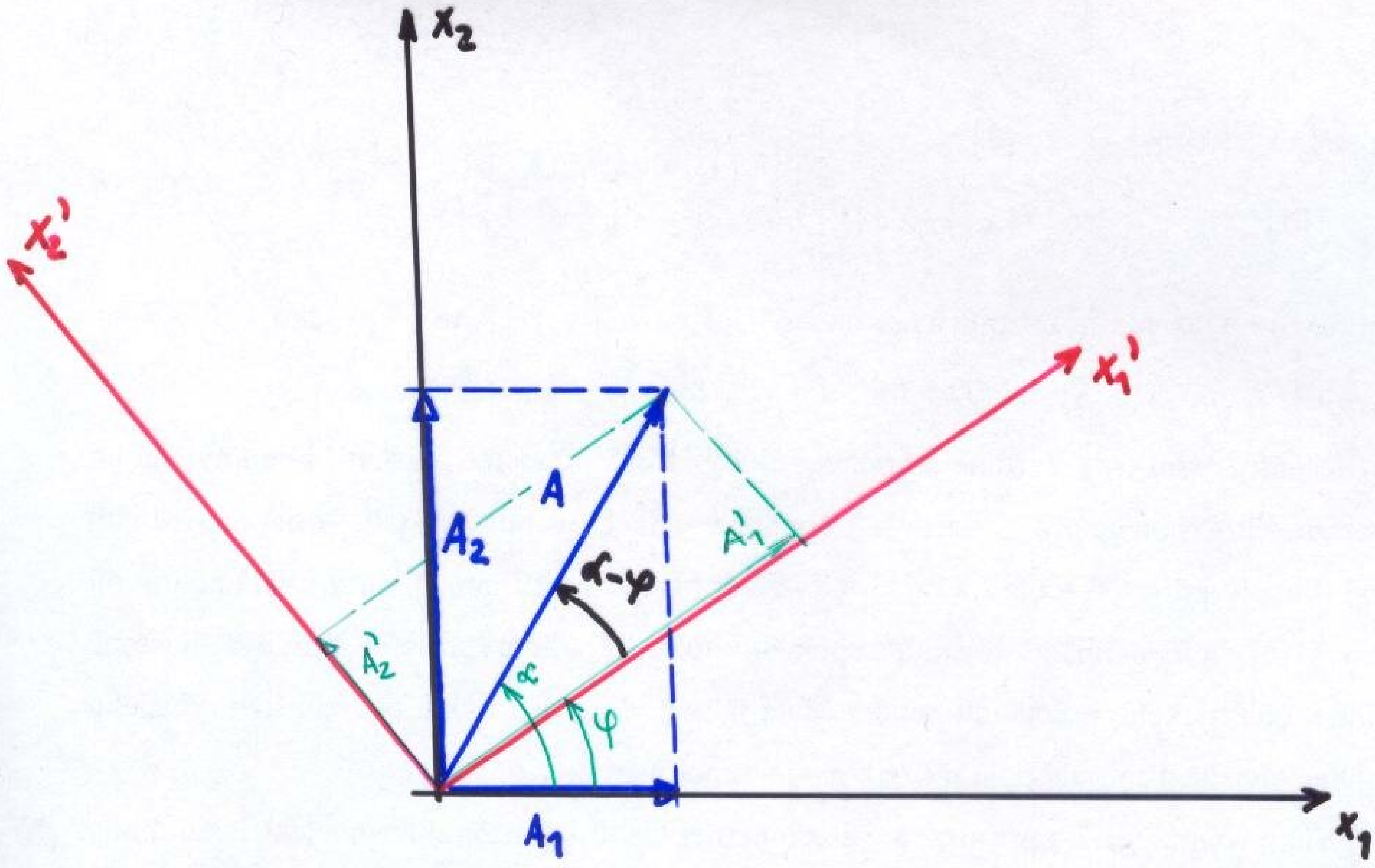
nie je tenzorom

TRANSFORMAČNÉ ZÁKONY TENZOROV

a, Tenzory $0°$ ⇒ skaláry : $T = T'$

b, Tenzory $1°$ ⇒ vektory $A_i' = a_{ij}A_j$, $A_i = a_{ji}A_j'$

$x_i' = a_{ij}x_j$, $x_i = a_{ji}x_j'$



$$A_1 = A\cos\alpha \qquad\qquad A_2 = A\sin\alpha$$

$$A'_1 = A\cos(\alpha-\varphi) = \overbrace{A\cos\alpha}^{A_1}.\cos\varphi + \overbrace{A\sin\alpha}^{A_2}.\sin\varphi$$

$$A'_2 = A\sin(\alpha-\varphi) = \underbrace{A\sin\alpha}_{A_2}.\cos\varphi - \underbrace{A\cos\alpha}_{A_1}.\sin\varphi$$

$$A'_1 = A_1.\cos\varphi + A_2.\sin\varphi$$

$$A'_2 = -A_1.\sin\varphi + A_2.\cos\varphi$$

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{a_{11}}{\cos\varphi} & \underset{a_{12}}{\sin\varphi} \\ \underset{a_{21}}{-\sin\varphi} & \underset{a_{22}}{\cos\varphi} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \qquad A'_i = a_{ij} A_j$$

a_{ij} - transf. matica

$$A_i = a_{ji} A'_j$$

c, Tenzory 2° - dyády

Majme u_i , v_j

Súčin vektorov dyadický:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{t_{11}}{u_1 v_1} & \underset{t_{12}}{u_1 v_2} & \underset{t_{13}}{u_1 v_3} \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ \underset{t_{31}}{u_3 v_1} & \underset{t_{32}}{u_3 v_2} & \underset{t_{33}}{u_3 v_3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u_i v_j = t_{ij}$$

$$\Leftarrow \begin{cases} u_i = a_{ki} u'_k \\ v_j = a_{lj} v'_l \end{cases}$$

$$t_{ij} = a_{ki} u'_k a_{lj} v'_l =$$

$$= a_{ki} a_{lj} u'_k v'_l \qquad t'_{kl} = u'_k v'_l$$

$$\Rightarrow t_{ij} = a_{ki} a_{lj} t'_{kl}$$ $\Rightarrow$ transformačný vzťah pre dyády

Inverzný vzťah : $t'_{ij} = a_{ik} a_{jl} t_{kl}$

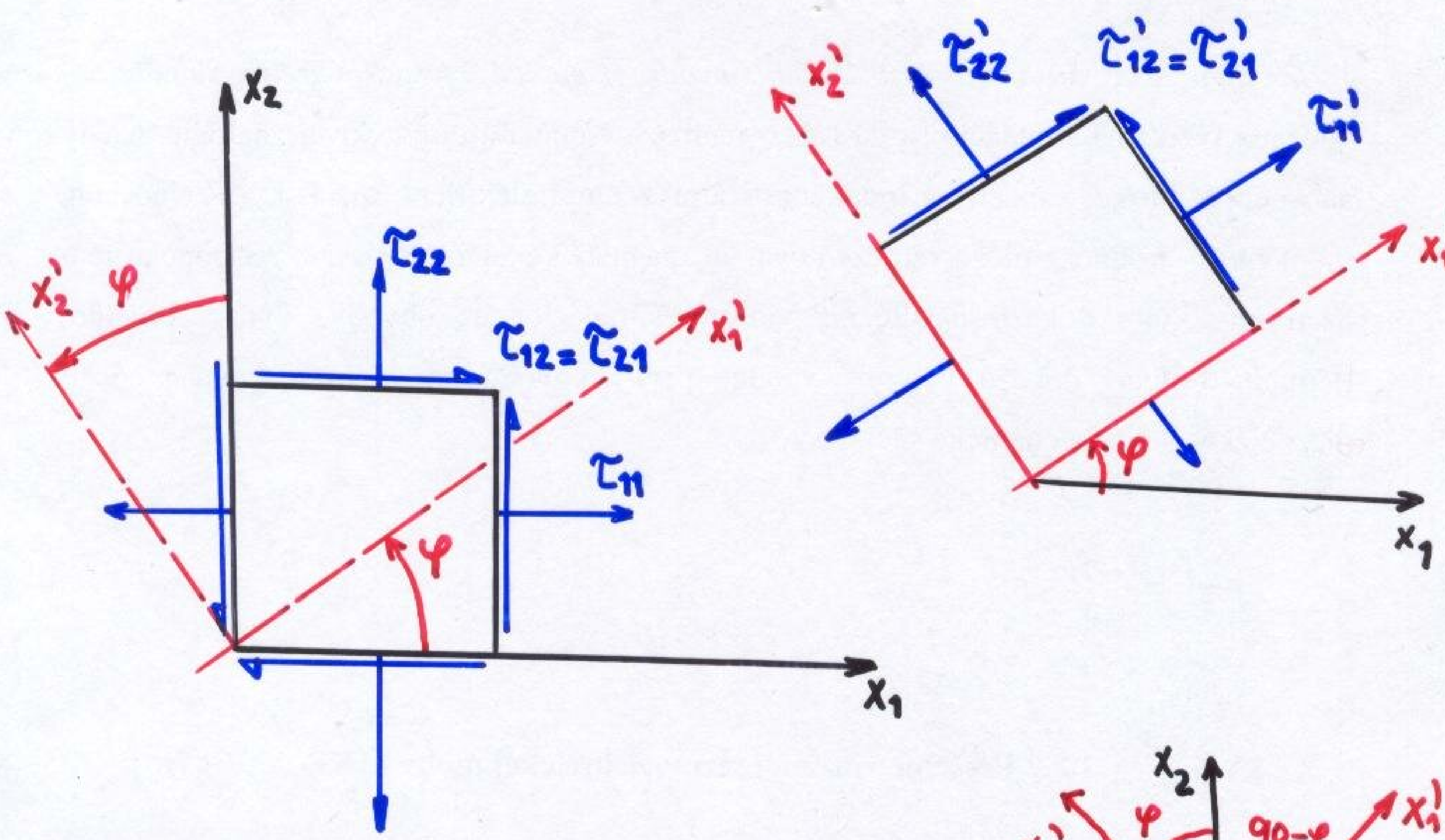
Dyáda - (3x3) matica - $3^2 = 9$ zložiek

$$t_{ij} = a_{ki} a_{lj} t'_{kl} \qquad i,j,k = 1,2,3$$

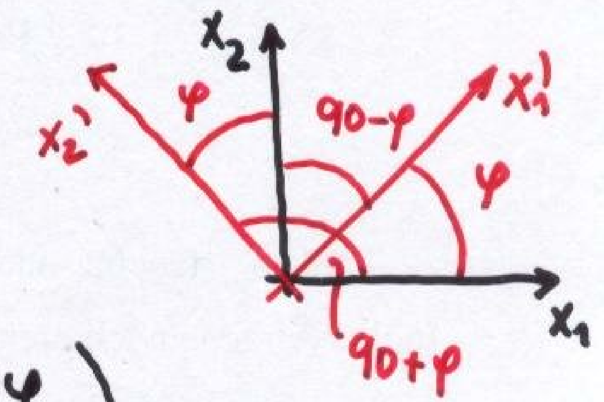
$$t'_{ij} = a_{ik} a_{jl} t_{kl}$$

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

Dyády : tenzor napätia , deformácie



Transf. matica :



$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \cos(90-\varphi) \\ \cos(90+\varphi) & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\widehat{x'_1,x_1}) & \cos(\widehat{x'_1,x_2}) \\ \cos(\widehat{x'_2,x_1}) & \cos(\widehat{x'_2,x_2}) \end{pmatrix}$$

$$\tau'_{ij} = a_{ik}\, a_{jl}\, \tau_{kl} \qquad i,j,k,l = 1,2$$

$$\left(\begin{aligned} \tau'_{11} &= a_{1k} a_{1l} \tau_{kl} = a_{11} a_{1l} \tau_{1l} + a_{12} a_{1l} \tau_{2l} = \\ &= a_{11} a_{11} \tau_{11} + a_{11} a_{12} \tau_{12} + a_{12} a_{11} \tau_{21} + a_{12} a_{12} \tau_{22} \end{aligned} \right)$$

$$\left(\tau_{11}' = a_{11}a_{11}\tau_{11} + a_{12}a_{12}\tau_{22} + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11})\tau_{12}\right)$$

$$\sigma(\varphi) = f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_z, \varphi)$$

$$\sigma(\varphi) = \sigma_x \cdot \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + 2 \cdot \tau_z \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

Tenzory n-tého stupňa – polyády

$$t_{ijk\ldots n} = a_{oi}\, a_{pj}\, a_{rk} \ldots a_{nn}\, t'_{opr\ldots n}$$

$$t'_{ijk\ldots n} = a_{io}\, a_{jp}\, a_{kr} \ldots a_{nn}\, t_{opr\ldots n}$$

Tenzor n-tého stupňa má 3^n - zložiek

$3^0 = 1$ sk.
$3^1 = 3$ vekt.
$3^2 = 9$ dyády

Napr.: tenzor pružnosti

C_{ijkl} – 4° ⇒ má $3^4 = 81$ konšt.

Zovšeobecnený Hookov zákon:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$$

$$(\tau_{ij}) = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \text{sym} & & \tau_{33} \end{pmatrix}$$ podobne ε_{ij}

$\tau_{ij} = f(9$ zložiek $\varepsilon_{ij})$

ZÁKLADNÉ OPERÁCIE S TENZORMI

a, Zlučovanie

$$C_{ijk} = A_{ijk} + B_{ijk} \quad , \quad D_{ijk} = A_{ijk} - B_{ijk}$$

b, Násobenie

$$A'_{ij} = a_{in} a_{jp} A_{np} \qquad B'_{klm} = a_{kr} a_{ls} a_{mt} B_{rst}$$

$$2^\circ \qquad\qquad\qquad 3^\circ$$

Potom výraz

$$C'_{ijklm} = A'_{ij} B'_{klm} = a_{in} a_{jp} a_{kr} a_{ls} a_{mt} \underbrace{A_{np} B_{rst}}_{C_{nprst}}$$

je tenzor $(2^\circ + 3^\circ) = 5^\circ$

c, [redacted] Zúženie tenzora

$$T'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kr} a_{ls} T_{mnrs}$$

napr.: $k = j$

$$T'_{ijjl} = a_{im} \underbrace{a_{jn} a_{jr}}_{\delta_{nr}} a_{ls} T_{mnrs} = a_{im} \delta_{nr} a_{ls} T_{mnrs} =$$

nn ; rr

$dx_j = \delta_{ij} dx_i$

$$= a_{im} a_{ls} \underbrace{\delta_{nr} T_{mnrs}} = a_{im} a_{ls} T_{ms}$$

$$T_{ms} = T_{m\overset{nn}{nn}s} = T_{mrrs} = \delta_{nr} T_{mnrs}$$

$\Rightarrow$ Stupeň tenzora sa zníži o dva stupne

δ_{ij} - $n = 2^\circ$; $i = j$ $\Rightarrow$ $\delta_{ii} = \delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ - skalár

⇒ Stupeň tenzora je určený počtom voľných indexov

$\underset{ik}{T_{ijkjll}}$, $\underset{ik}{R_{ijk}S_{jll}}$, P_{ik} – tenzory 2°

V tenzorovej rovnici musí byť počet voľných indexov rovnaký.

Všetky tenzorové veličiny musia byť vzťahované na rovnaký súrad. systém

$\Rightarrow \quad A_{ij} + B'_{kl} = C_{?}$?

$A_{ij} + \overbrace{a_{ki}a_{lj}B'_{kl}}^{B_{ij}} = C_{ij}$

$\Rightarrow \quad a_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$ – nie je tenzorom (vzťahuje sa na dva SS)

d, Tenzor ako lineárny operátor

$TA = C \qquad \delta A = A \qquad T_{ij}A_j = C_i \qquad \delta_{ij}A_j = A_i$

$T(A+B) = TA + TB \qquad T_{ij}(A_j + B_j) = T_{ij}A_j + T_{ij}B_j$

$T(mA) = mTA \qquad T_{ij}(mA_j) = mT_{ij}A_j = mC_i$

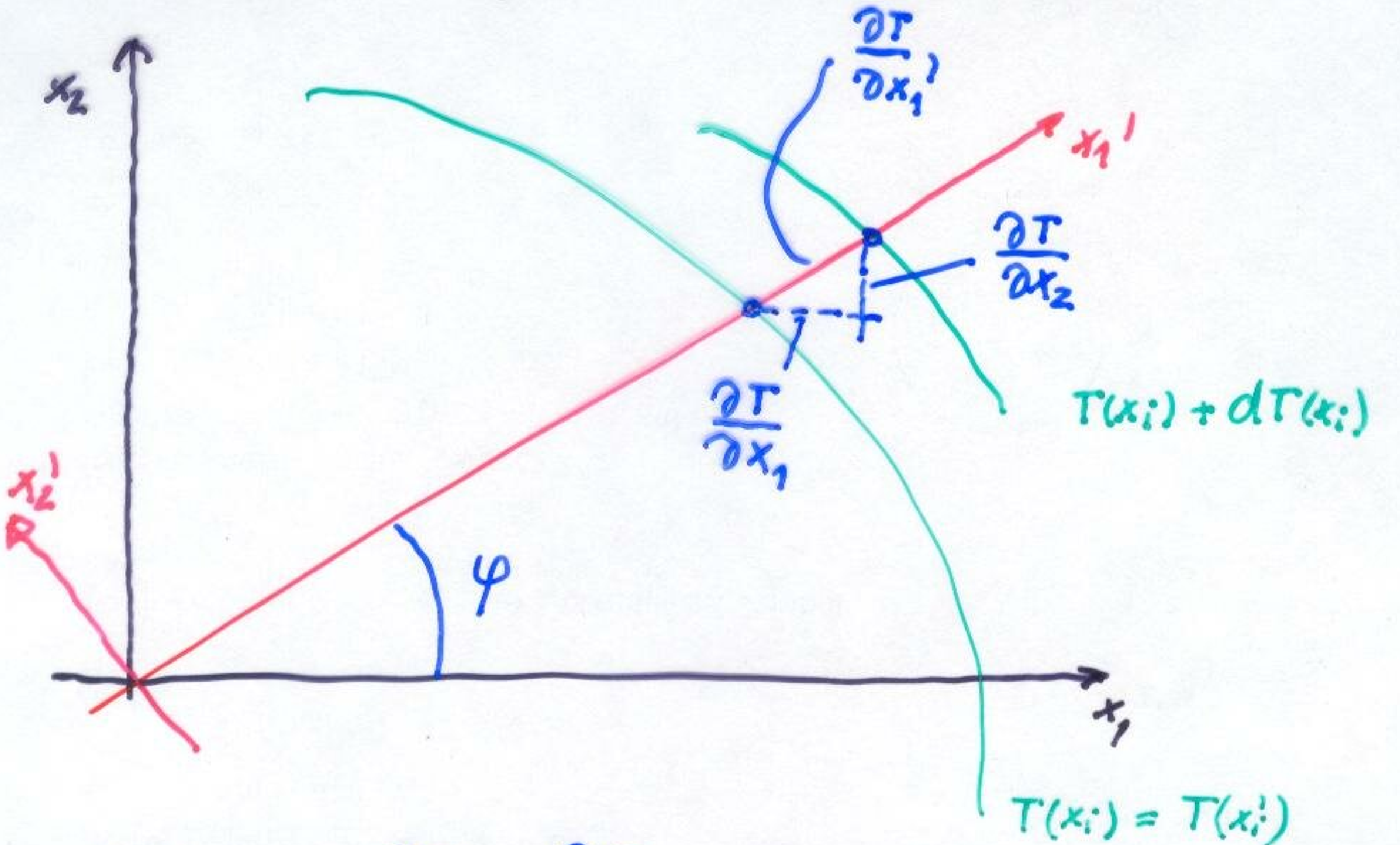
Derivácia tenzorov

a, skalárne pole : $f(x_i) = f(x'_i) \qquad x_i = a_{ji}x'_j \qquad x'_m = a_{mj}x_j$

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x'_m}\frac{\partial x'_m}{\partial x_j} = a_{mj}\frac{\partial f(x'_i)}{\partial x'_m} \qquad \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = a_{ji} \qquad \frac{\partial x'_m}{\partial x_j} = a_{mj}$$

$\operatorname{grad} f = a_{mj} \operatorname{grad} f'$ ⇒ vektor

Príklad : Gradient teplotného poľa



Známe: $\frac{\partial T}{\partial x_1}$; $\frac{\partial T}{\partial x_2}$, φ ; $a_{11} = \cos\varphi$; $a_{12} = \sin\varphi$

Treba určiť $\frac{\partial T}{\partial x_1'}$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i'} = a_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial x_1'} = a_{1j} \frac{\partial T}{\partial x_j} =$$

$$= a_{11} \frac{\partial T}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial T}{\partial x_2}$$

$$a_{11} = \cos\varphi = \frac{\partial T/\partial x_1}{\partial T/\partial x_1'} \quad ; \quad a_{12} = \sin\varphi = \frac{\partial T/\partial x_2}{\partial T/\partial x_1'}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x_1'} = \frac{\partial T/\partial x_1}{\partial T/\partial x_1'} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial T(x_2)/\partial x_2}{\partial T/\partial x_1'} \frac{\partial T}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1'} \frac{\partial T}{\partial x_1'} = \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial T}{\partial x_2}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x_1'}\right)^2 = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)^2 \; !$$

b, vektorové pole

$u'_i = a_{im} u_m$

$u_i = u_i(x_j)$ $\qquad$ $\left(u'_i = \cancel{a_{ij}} u_j \right)$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = u'_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x'_j}(a_{im} u_m) = \qquad u'_i = a_{im} u_m$$

$x_l = a_{jl} x'_j$

$$= a_{im} \frac{\partial u_m}{\partial x'_j} = a_{im} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \underbrace{\frac{\partial x_l}{\partial x'_j}}_{a_{jl}} = a_{im} a_{jl} \frac{\partial u_m}{\partial x_l}$$

$$u'_{i,j} = a_{im} a_{jl} u_{m,l} \qquad \Rightarrow \text{dyáda}$$

Platí všeobecne : Deriváciou tenzora podľa x_i sa stupeň zvýši o 1°

$$\frac{\partial T_{ijk\ldots n}}{\partial x_o} = T_{ijk\ldots no}$$

zúženie: $u_{i,i} = \underbrace{a_{mi} a_{li}}_{\delta_{ml}} u'_{m,l} = \delta_{ml} u'_{m,l} =$

$(u_{i,j} = a_{mi} a_{lj} u'_{ml})$

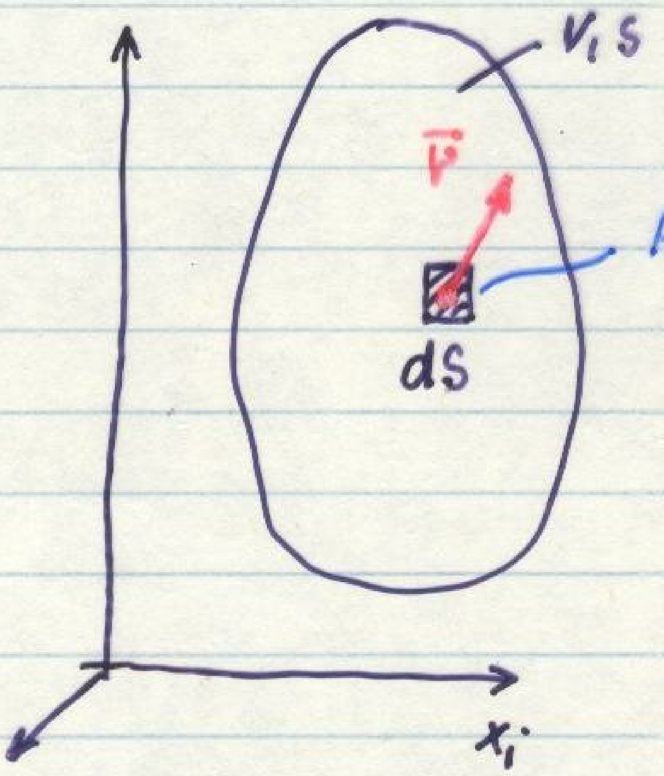
$j \equiv i$

$$= u'_{m,m} = u'_{l,l} \qquad \Rightarrow \text{skalár} \quad (\text{o } 2°)$$

$$u_{i,i} = u_{1,1} + u_{2,2} + \underbrace{u_{3,3} \overset{!}{=}}_{\text{lebo je to skalár}} u'_{1,1} + u'_{2,2} + u'_{3,3}$$

Gausová veta:

Slúži na prevod objemového integrálu na plošný a naopak.



V - objem telesa

S - povrch telesa

$A(x_i)$ - fyzikálna veličina (pole) na povrchu S a v objeme V

$\vec{\nu} \in (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ - vonkajšia normála plôšky dS

ν_j, $j = 1,2,3$ - smerové cosinusy (zložky) jednotkovej normály

Pre tenzor $A(x_i)$ platí:

$$\int_V \frac{\partial A(x_i)}{\partial x_j}\, dV = \int_S A\, \nu_j\, dS$$

a) nech $A \equiv u_i$ - vektor

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dV = \int_S u_i \nu_j\, dS = \int_V \epsilon_{ij}\, dV \qquad \epsilon_{ij} = u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

dyadický súčin dvoch vektorov

$$\int_V \text{grd}\, \bar{u}\, dV = \int_S \bar{u} \otimes \bar{\nu}\, dS$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1\nu_1 & u_1\nu_2 & \dots \\ u_2\nu_1 & \dots & \\ u_3\nu_1 & \dots & \end{bmatrix}}_{C_{ij}}$$

$$\int_V \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ & & \\ & & u_{3,3} \end{pmatrix} dV = \int dS$$

b) nech $A \equiv \tau_{ij}$ → dyáda

$$\int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\, dV = \int_S \tau_{ij}\, \nu_j\, dS$$

zúženie v Gausovej vete:

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\, dV = \int_S u_i \nu_i \, dS$$

$$\int_V \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) dV = \int_S (u_1 \nu_1 + u_2 \nu_2 + u_3 \nu_3)\, dS$$

alebo: $\int_V \operatorname{div} \bar{u}\, dV = \int_S \bar{u} \cdot \bar{\nu}\, dS$ — skalárny súčin dvoch vektorov

Majme výraz:

$$\int_V \underbrace{e_{ijk}\, u_{k,j}}_{\text{vektor}}\, dV = e_{ijk} \int_V u_{k,j}\, dV = e_{ijk} \int_V \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\, dV = e_{ijk} \int_S u_k \nu_j\, dS =$$

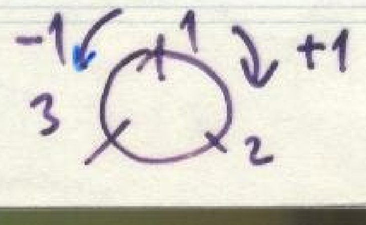
$$= \int_S e_{ijk}\, u_k \nu_j \, dS$$

$$\Rightarrow \int_V \underbrace{e_{ijk}\, u_{k,j}}_{\operatorname{rot} \bar{u}}\, dV = \int_S \underbrace{e_{ijk}\, u_k \nu_j}_{\bar{\nu} \times \bar{u}}\, dS$$

$$\int_V \operatorname{rot} \bar{u}\, dV = \int_S \bar{\nu} \times \bar{u}\, dS \qquad \Rightarrow \underbrace{\bar{\nu} \times \bar{u} \equiv e_{ijk}\, u_k \nu_j}_{\text{vektorový súčin dvoch vektorov}}$$

$\bar{A} \equiv A_k \in (A_1, A_2, A_3)$; $\bar{B} \equiv B_l \in (B_1, B_2, B_3)$

$$\bar{A} \times \bar{B} \equiv e_{ijk} A_j B_k = C_i$$



a t.d. ..

$$C_1 = e_{123} A_2 B_3 + \cancel{e_{231} A_3 B_1} + \cancel{e_{312} A_1 B_2} +$$

$$+ \cancel{e_{321} A_2 B_1} + \cancel{e_{213} A_1 B_3} + e_{132} A_3 B_2 = (A_2 B_3 - A_3 B_2)$$

Izotropické tenzory $\Rightarrow$ transformáciou sa nemenia

$$T_{ijk\dots n} = T'_{ijk\dots n}$$

Kroneckerová delta: $\delta_{ij} = \delta'_{ij}$

$$\delta_{ij} = a_{ik}a_{jk} = a_{ki}a_{kj} = \delta'_{ij}$$

transf. zákon

$$\delta'_{ij} = a_{ik}a_{jk} = a_{ik}\underbrace{a_{jl}\delta_{kl}}_{a_{jk}} = a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{kl}a_{jl} = a_{jk}$$

Permutačný symbol:

$$e_{ijk} = e'_{ijk}$$

Tenzor pružnosti: (pre izotropické materiály)

$$C_{ijkl} = C'_{ijkl}$$

Všetky skaláre sú izotropické: $T = T'$

- napr. teplota
- divergencia vektora

Transponované, symetrické a antisymetrické tenzory

Majme $T = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \underset{ij}{t_{21}} & t_{22} & \underset{ij}{t_{23}} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$

Urobme $(t_{ij})^T$ - vymeniť riadky za stĺpce:

$$(t_{ij})^T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ \underset{ji}{t_{12}} & t_{22} & \underset{ji}{t_{32}} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(t_{ij})^T = (t_{ji})$$

Symetrický tenzor:

$$t_{ij} = t_{ji} \Rightarrow T = T^T$$

$$t_{ij}^{sym} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix}$$

$t_{12} = t_{21}$

$t_{13} = t_{31}$

$t_{23} = t_{32}$

Symetria tenzora sa pri transformácii zachováva:

$t_{ij} = t_{ji} \Rightarrow t'_{ij} = t'_{ji}$

Antisym. tenzor:

$$t_{ij} = -t_{ji} \qquad \Rightarrow t_{ii} = 0$$

$$t_{ij}^{as} = \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} \\ -t_{13} & -t_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Rozdelenia tenzora:

$$t_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji}) + \frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji}) =$$
$$= t_{ij}^{sym} + t_{ij}^{as}$$

$$t_{ij}^{sym} = \begin{pmatrix} t_{11} & \frac{1}{2}(t_{12} + t_{21}) & \frac{1}{2}(t_{13} + t_{31}) \\ \frac{1}{2}(t_{21} + t_{12}) & t_{22} & \frac{1}{2}(t_{23} + t_{32}) \\ \frac{1}{2}(t_{31} + t_{13}) & \frac{1}{2}(t_{23} + t_{32}) & t_{33} \end{pmatrix}$$

$$t_{ij}^{as} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(t_{12} - t_{21}) & \frac{1}{2}(t_{13} - t_{31}) \\ \frac{1}{2}(t_{21} - t_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(t_{23} - t_{32}) \\ \frac{1}{2}(t_{13} - t_{31}) & \frac{1}{2}(t_{23} - t_{32}) & 0 \end{pmatrix}$$

Súčin $\overset{sym}{t_{ij}} \overset{as}{t_{ij}} = 0$

$$\overset{s}{t_{ij}} \overset{a}{t_{ij}} = \overset{s}{t_{1j}} \overset{a}{t_{1j}} + \overset{s}{t_{2j}} \overset{a}{t_{2j}} + \overset{s}{t_{3j}} \overset{a}{t_{3j}} =$$

$$= \underbrace{\overset{s}{t_{11}} \overset{a}{t_{11}}}_{0} + \overset{s}{t_{12}} \overset{a}{t_{12}} + \overset{s}{t_{13}} \overset{a}{t_{13}} +$$

$$+ \overset{s}{t_{21}} \overset{a}{t_{21}} + \underbrace{\overset{s}{t_{22}} \overset{a}{t_{22}}}_{0} + \overset{s}{t_{23}} \overset{as}{t_{23}} +$$

$$+ \overset{s}{t_{31}} \overset{a}{t_{31}} + \overset{s}{t_{32}} \overset{a}{t_{32}} + \underbrace{\overset{s}{t_{33}} \overset{a}{t_{33}}}_{0} =$$

$$= \underbrace{\overset{s}{t_{12}} \overset{a}{t_{12}} + \overset{s}{t_{21}} \overset{a}{t_{21}}}_{0} +$$

$$+ \overset{s}{t_{13}} \overset{a}{t_{13}} + \overset{s}{t_{31}} \overset{as}{t_{31}} +$$

$$+ \overset{s}{t_{23}} \overset{a}{t_{23}} + \overset{s}{t_{32}} \overset{a}{t_{32}} = 0$$

$$\left\} \begin{array}{l} \overset{s}{t_{12}} = \overset{s}{t_{21}} \\ \overset{a}{t_{12}} = -\overset{a}{t_{21}} \\ \vdots \\ \text{atď} \end{array} \right.$$

VLASTNÉ HODNOTY SYMETRICKÉHO TENZORA

1. Rovnica vlastného tvaru

Majme sym. tenzor : $t_{ij} = t_{ji}$ v SS x_i, $i = 1,3$

Kroneckerova delta : δ_{ij}

$A'_i = a_{ij} A_j \quad (A'_j = a_{ij} A_i)$

Vektor : $A_i = (A_1, A_2, A_3)$ $\quad A_j = a_{ij} A'_i$ v X_i

Konštanta úmernosti : λ

ÚLOHA :

Nájsť také λ, aby platilo:

$$t_{ij} A_j \overset{!}{=} \lambda . A_i = \lambda \underbrace{\delta_{ij}}_{t_{ij}} \overbrace{A_j}^{A_i} \quad , \text{ resp. } \lambda \text{ nahrádza } t_{ij}$$

$$(t_{ij} - \lambda \delta_{ij}) A_j = 0 \quad \text{- rovnica vl. tvaru } t_{ij}$$

Nech $\nu_j = \dfrac{A_j}{|\bar{A}|}$ → je jednotkový vektor

$\nu_i = \cos(\widehat{\bar{A}, x_i})$ $\qquad \nu_j \equiv (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$

$|\bar{\nu}| = 1$

$\Rightarrow$ upravená rovnica vlastného tvaru:

$$(t_{ij} - \lambda \delta_{ij}) v_j = 0$$

$$\begin{bmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \emptyset$$

má nenulové riešenie, keď:

$$|t_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = \emptyset$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \emptyset$$

$\Rightarrow$

$$(t_{11}-\lambda)(t_{22}-\lambda)(t_{33}-\lambda) + t_{21} t_{32} t_{13} + t_{31} t_{12} t_{23} -$$

$$- t_{13}(t_{22}-\lambda) t_{31} - t_{23} t_{32} (t_{11}-\lambda) - (t_{33}-\lambda) \cdot t_{12} t_{21} = \emptyset$$

Po roznásobení :

$$-\lambda^3 + I_1 . \lambda^2 - I_2 . \lambda + I_3 = \emptyset \qquad (*)$$

pričom : $I_1 = t_{11} + t_{22} + t_{33} = t_{ii} = tr(t_{ij}) = sp(t_{ij})$

$$I_2 = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{13} \\ t_{31} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= t_{11}.t_{22} - t_{12}.t_{21} + t_{11}.t_{33} - t_{13}.t_{31} + t_{22}.t_{33} - t_{23}.t_{32}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(t_{ii} t_{jj} - t_{ij} t_{ji})$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = e_{ijk}\, t_{i1}\, t_{j2}\, t_{k3} = t_{11}.t_{22}.t_{33} + \dots$$

$I_1, I_2, I_3 \Rightarrow$ invarianty tenzora (skaláry)

Riešením rovnice $(*)$ možno určiť tri korene $\lambda^{(k)}$, $k = 1,2,3$ $\Rightarrow$ vlastné hodnoty t_{ij}

$\Rightarrow$ Dyáda má tri vlastné hodnoty $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$

Dosadením $\lambda^{(k)}$ do rovnice vlastného tvaru :

$$(t_{ij} - \lambda^{(k)} \delta_{ij}) v_j^{(k)} = 0 \qquad \Rightarrow$$

Nech $\lambda^{(k)} = \lambda^{(1)}$ $\Rightarrow (t_{ij} - \lambda^{(1)} \delta_{ij}) v_j^{(1)} = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} t_{11}-\lambda^{(1)} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda^{(1)} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-\lambda^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}$$

$v_j^{(1)}$ – vlastný vektor t_{ij}

Podobne pre $\lambda^{(k)} = \lambda^{(2)} \Rightarrow v_j^{(2)} = (v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, v_3^{(2)})$

$\lambda^{(k)} = \lambda^{(3)} \Rightarrow v_j^{(3)} = (v_1^{(3)}, v_2^{(3)}, v_3^{(3)})$

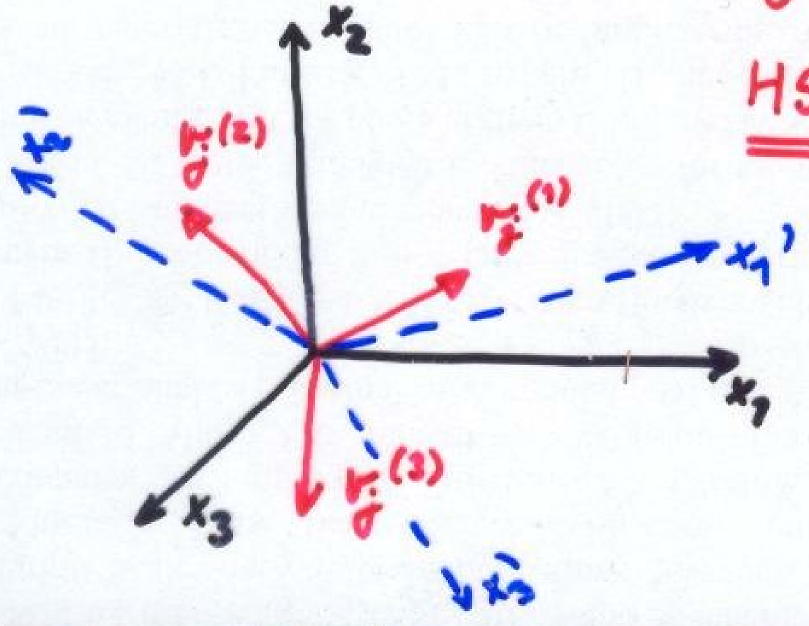
$\Rightarrow$ $v_j^{(1)}$, $v_j^{(2)}$, $v_j^{(3)}$ – hlavné (vlastné) vektory

$v_j^{(k)} = \cos(v_j^{(k)}, x_i)$ – vlastné smery tenzora

Platí: $v_j^{(1)} \perp v_j^{(2)} \perp v_j^{(3)}$

$\Downarrow$

HSS tenzora



OTÁZKA:

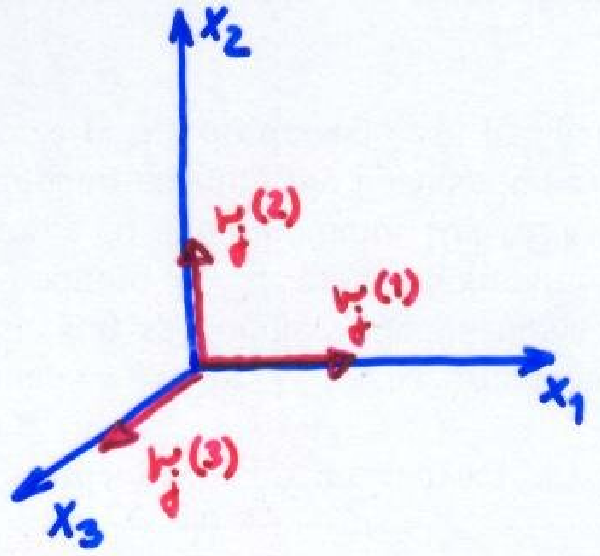
Vzhľadom na x_i má tenzor zložky t_{ij},

ktoré sa pri transformácii SS menia:

$$t'_{ij} = a_{ik} a_{jl} t_{kl}$$

Aké zložky t'_{ij} ma tenzor v HSS ?

$\Rightarrow$ Stotožnime SS $- x_i$ s HSS



$$\nu_j^{(k)} \equiv \cos(\widehat{\nu_j^{(k)}, x_i})$$

$$\Rightarrow \quad \nu_j^{(1)} = \left\{(\cos \widehat{\nu_j^{(1)}, x_1}), \cos(\widehat{\nu_j^{(1)}, x_2}), \cos(\widehat{\nu_j^{(1)}, x_3})\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \nu_j^{(1)} = \{1, \phi, \phi\}$$

$$\nu_j^{(2)} = \{\phi, 1, \phi\}$$

$$\nu_j^{(3)} = \{\phi, \phi, 1\}$$

Potom :

$$\lambda = \lambda^{(1)}$$

$$(t_{ij} - \lambda^{(1)} \delta_{ij}) v_j^{(1)} = 0$$

$i=1 \quad \Rightarrow \quad (t_{1j} - \lambda^{(1)} \delta_{1j}) . v_j^{(1)} = \phi$

albo po sumácii :

$$(t_{11} - \lambda^{(1)} . \delta_{11}) v_1^{(1)} = \phi$$

$$\boxed{t_{11} = \lambda^{(1)}}$$

$i = 2 \quad \Rightarrow \quad (t_{2j} - \lambda^{(1)} \delta_{2j}) v_j^{(1)} = 0$

$$(t_{21} - \lambda^{(1)} \delta_{21}) . 1 + (t_{22} - \lambda^{(1)} . \delta_{22}) . \phi + \phi = \phi$$

$$\boxed{t_{21} = \phi}$$

$i=3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{31} = \phi}$

Podobne pre $\lambda^{(2)}$ a $\lambda^{(3)}$

$\Rightarrow \quad t_{11} = \lambda^{(1)} \quad , \quad t_{22} = \lambda^{(2)} \quad , \quad t_{33} = \lambda^{(3)}$

$$t_{ij} = \phi \quad \text{pre} \quad i \neq j$$

$\Rightarrow$ v HSS má t_{ij} zložky :

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & \phi & \phi \\ \phi & \lambda^{(2)} & \phi \\ \phi & \phi & \lambda^{(3)} \end{pmatrix}$$

Môžu nastať prípady:

1, $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)} \neq \lambda^{(3)}$ $\Rightarrow$ t_{ij} má jediný HSS

2, $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} \neq \lambda^{(3)}$ $\Rightarrow$ t_{ij} má ∞ HSS
(jedna s osi je osou symetrie tenzora)

3, $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)}$ $\Rightarrow$ Všetky SS sú HSS

Charakteristická rovnica v HSS :

$$\begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - \lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \phi$$

$t_{11} = \lambda^{(1)}$; $t_{22} = \lambda^{(2)}$; $t_{33} = \lambda^{(3)}$

$t_{ij} = 0$ pre $i \neq j$ $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} \lambda^{(1)}-\lambda & \phi & \phi \\ \phi & \lambda^{(2)}-\lambda & \phi \\ \phi & \phi & \lambda^{(3)}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \ (\lambda^{(1)}-\lambda)\cdot(\lambda^{(2)}-\lambda)\cdot(\lambda^{(3)}-\lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 + \overbrace{(\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}+\lambda^{(3)})}^{J_1}\cdot\lambda^2 - \overbrace{(\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}+\lambda^{(2)}\lambda^{(3)}+\lambda^{(1)}\lambda^{(3)})}^{J_2}\cdot\lambda +$$
$$+ \underbrace{\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\lambda^{(3)}}_{J_3} = 0$$

a teh

$$-\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = J_1 \qquad t_{ii} = \lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}+\lambda^{(3)}$$

$$I_2 = J_2 \qquad \tfrac{1}{2}(t_{ii}\,t_{jj} - t_{ij}\,t_{ji}) = \lambda^{(1)}\lambda^{(2)}+\lambda^{(2)}\lambda^{(3)}+\lambda^{(1)}\lambda^{(3)}$$

$$I_3 = J_3 \qquad e_{ijk}\,t_{i1}\,t_{j2}\,t_{k3} = \lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\lambda^{(3)}$$

Invarianty tenzora

VLASTNÉ HODNOTY, VL. VEKTORY, HL. OSI, INVARIANTY SYM. TENZORA

Majme τ_{ij}, A_j, λ, δ_{ij}

Otázka: Existuje také λ, že

$$\tau_{ij} A_j = \lambda \delta_{ij} A_j$$

resp.:

$$(\tau_{ij} - \lambda \delta_{ij}) A_j = 0 \quad \Big/ |\vec{A}| \qquad \frac{A_j}{|\vec{A}|} = v_j$$

$$\Rightarrow \quad (\tau_{ij} - \lambda \delta_{ij}) v_j = 0 \quad \Rightarrow \quad v_j = (v_1, v_2, v_3) \neq \theta$$

$$\Rightarrow \left|\tau_{ij} - \lambda \delta_{ij}\right| = 0 \qquad \begin{vmatrix} \tau_{11} - \lambda & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \lambda & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 . \lambda + I_3 = 0$$

$I_1 = \tau_{ii} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$ 1. invariant

$$I_2 = \frac{1}{2}(t_{ii} t_{jj} - t_{ij} t_{ji}) = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{33} & t_{31} \\ t_{13} & t_{11} \end{vmatrix}$$

2. invariant

$$I_2 = \frac{1}{2}(\tau_{ii} \tau_{jj} - \tau_{ij} \tau_{ji})$$

$$I_3 = e_{ijk} \tau_{i1} \tau_{j2} \tau_{k3} = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ & \tau_{22} & \tau_{23} \\ & & \tau_{33} \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$ $\Rightarrow \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ – hlavné hodnoty (vlastné) tenzora

$\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ – zložky tenzora

v HSS – určený vl. vektormi